ЛЕКЦИЯ 8 ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЯХ.

§1. Понятие производной *n*-го порядка

Производная $f'(x)$ функции $y=f(x)$, определенной и дифференцируемой на интервале $(a;в)$, представляет собой функцию, также определенную на интервале $(a;в)$. Возможен случай, когда эта функция $f'(x)$ сама является дифференцируемой в некоторой точке x интервала $(a;в)$, т.е. имеет в этой точке производную. Тогда указанную производную называют второй производной (или производной второго порядка) функции $y=f(x)$ в точке x и обозначают символом $y''(x)$ или $f''(x)$.

Понятие n-й производной (или производной n-го порядка) вводится индуктивно, переходя от первой производной к последующим. Соотношение, определяющее n-ю производную, имеет вид $y^{(n)}=\left[y^{(n-1)}\right]'$. Для обозначения производных высших порядков используют также обозначения: $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ или $\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$.

Функцию, имеющую на интервале $(a;в)$ производную порядка n, обычно называют n раз дифференцируемой на интервале $(a;в)$.

Если функция $s=f(t)$ описывает закон движения материальной точки вдоль оси ot, то, как известно, первая производная $f'(t)$ дает мгновенную скорость движущейся точки в момент времени t. В таком случае вторая производная $f''(t)$ дает ускорение точки в момент времени t.

Производные высших порядков вычисляются по известным правилам вычисления производных первого порядка. Приведем формулы для производных n-го порядка некоторых элементарных функций:

1^0. $\left(x^{\alpha}\right)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$, $x>0$, α-любое число;

2^0. $\left(a^{x}\right)^{(n)}=a^{x}\cdot(\ln a)^{n}$, $(0<a\neq 1)$;

3^0. $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$;

4^0. $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$.

§2. Формула Лейбница для производной *n*-го порядка произведения двух функций

Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ имеют производные до n-го порядка включительно, то справедлива следующая формула Лейбница:

$$(u\cdot v)^{(n)}=u^{(n)}\cdot v+n\cdot u^{(n-1)}\cdot v'+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}\cdot v''+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot\ldots n}u\cdot v^{(n)}.$$

§3. Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x. Первый дифференциал этой функции имеет вид

$$dy = f'(x)dx$$

(1)

и является функцией двух переменных x и dx. Пусть функция $f'(t)$ в свою очередь дифференцируема в точке x. Дифференциал от первого дифференциала в точке x называется вторым дифференциалом или дифференциалом второго порядка в этой точке и обозначается символом d^2y или $d^2f(x)$. Для вычисления дифференциала второго порядка служит формула

$$d^2 y = f''(x)(dx)^2. \qquad (2)$$

Аналогично последовательно определяются дифференциалы более высоких порядков. Предполагая, что функция $f(x)$ имеет в точке x производную n-го порядка, мы определяем дифференциал n-го порядка функции $y=f(x)$ в точке x как дифференциал от дифференциала (n-1)-го порядка.

Для дифференциала n-го порядка методом индукции устанавливается формула:

$$d^n y = f^{(n)}(x)\cdot(dx)^n.$$

(3)

Заметим, что формулы (2) и (3) при n>1 справедливы, вообще говоря, лишь тогда, когда x является независимой переменной, т.е. второй и последующие дифференциалы не обладают свойствами инвариантности формы.

§4. Дифференцирование функции, заданной параметрически

Пусть функция $y=f(x)$ задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Если функции $x(t)$ и $y(t)$ дважды дифференцируемы и $x'(t)\neq 0$, то первая и вторая производные данной функции вычисляются соответственно по формулам:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{y''(t)\cdot x'(t) - x''(t)\cdot y'(t)}{[x'(t)]^3}.$$

§5. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши

Теорема 5.1. (теорема Ролля). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [a;$в$], дифференцируема на интервале (a;$в$) и принимает на концах отрезка равные значения: $f(a) = f(в)$, то существует точка $\xi \in (a;\ в)$, в которой $f'(\xi) = 0$.

Геометрическая интерпретация теоремы Ролля: существует точка $\xi \in (a;\ в)$ такая, что касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке $(\xi;\ f(\xi))$ параллельна оси OX.

Теорема 5.2. (теорема Лагранжа). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;в]$ и дифференцируема на интервале $(a;в)$, то существует точка $\xi \in (a;в)$ такая, что справедлива формула

$$\frac{f(в)-f(a)}{в-a}=f'(\xi). \tag{4}$$

Формула (1) называется формулой Лагранжа (или формулой конечных приращений) и записывают ее также в виде $f(в)-f(a)=f'(\xi)\cdot(в-a)$.

Геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа: число $\frac{f(в)-f(a)}{в-a}$ является угловым коэффициентом прямой, проходящей через концы графика функции $y=f(x)$ - точки $(a;\ f(a))$ и $(в;\ f(в))$, а $f'(\xi)$ - угловым коэффициентом касательной к графику в некоторой точке $(\xi;\ f(\xi))$. Формула Лагранжа показывает, что касательная к графику в некоторой точке $(\xi;\ f(\xi))$ параллельна прямой, проходящей через концы графика (или совпадает с ней).

Теорема 5.3. (теорема Коши). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a;в]$, дифференцируемы на $(a;в)$ и $g'(x)\neq 0$ на $(a;в)$, то существует точка $\xi\in(a;в)$ такая, что справедлива формула

$$\frac{f(в)-f(a)}{g(в)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{5}$$

Формула (5) называется формулой Коши.

§6. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя

Теоремы 6.1. (Теорема Лопиталя). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0. Пусть далее, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ и $g'(x)\neq 0$ в указанной окрестности точки x_0. Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, причем справедлива формула

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{6}$$

Теорема 6.2. (теорема Лопиталя). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в окрестности точки x_0, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$ и $g'(x)\neq 0$ в этой окрестности. Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то и существует $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и имеет место равенство

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{7}$$

Выраженные теоремами 7.4 и 7.5 правила называют правилом Лопиталя и применяют для раскрытия неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Неопределенности других типов $\left(0\cdot\infty;\infty-\infty;1^{\infty};0^{0};\infty^{0}\right)$ можно свести к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ и затем применять правило Лопиталя.